TITLE:

1次元ペアノ空間のホモトピー型 (一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究)

AUTHOR(S):

江田, 勝哉

CITATION:
江田, 勝哉. 1次元ペアノ空間のホモトピー型 (一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーに関する研究). 数理解析研究所講究録 2010, 1681: 9-17

ISSUE DATE:
2010-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/141373

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
第1681巻 2010年 9-17

1 次元ペアノ空間のホモトピー型

江田 勝哉

以下は 1 次元ペアノ空間のホモトピー型が基本群により決定されるという定理 [2] の証明の概略をここに至る研究の歴史にふれながら書いたもので，講演のときは歴史の方は話さなかったので講演の内容とは多少異なっている．講演ではどのように証明したか，あるいは何故成立するのかという観点から説明した．ここでは，この定理が成立するという感覚は局所的によい空間を研究してきているトポロジストにとって予想できることではなく，むしろ成立しないだろうと予想する方が普通のことであろうという考え方のほうから説明する．

1 次元のペアノ空間が局所的によい空間，たとえば局所的に単連結であれば有限グラフとホモトピー同値であることはよく知られている．その基本群は有限生成の自由群である．しかしフラクタルとしてよく知られているシルピンスキーカーペット，シルピンスキーガスケットやメンガースポンジなど局所的に複雑な 1 次元ペアノ空間もある．このような空間の基本群についてはあまり知られていない．

1980 年代に始まる負曲率幾何の極限空間の研究で 1 次元の局所的に単連結でない空間が現れることからそのような空間の基本群に興味がもたれるようになった．ただ筆者はそのような流れでこの研究を始めたわけではないので，現在そちらの勉強をしている．1 次元の局所的に単連結でない空間で一番簡単なものは Hawaiian Earring (図 1) である．図が大きすぎるように見えると思うが，この研究の中心的役割をはたすのでそれくらい大きい意味があるということにしておく．(実は別なところで使ったのをそのまま使ったので大き過ぎた．) Hawaiian Earring で無限個の円周が収束している点を o とする．この点 o 以外の点では局所的に区間で同相なので o でだけ局所的に単連結でない．Hawaiian Earring の基本群の研究は 1950 年代の H.B. Griffiths [7, 8] に始まる．とくに多くの人の興味をひいたのは Hawaiian Earring 上の Cone であろうと思う，Cone は可縮であるから基本群は自明である．一点和は接着点の周りが局所的によい空間ならば，各々の空間の基本群の自由積となる．その局所的な条件が本質的であることを示す例が

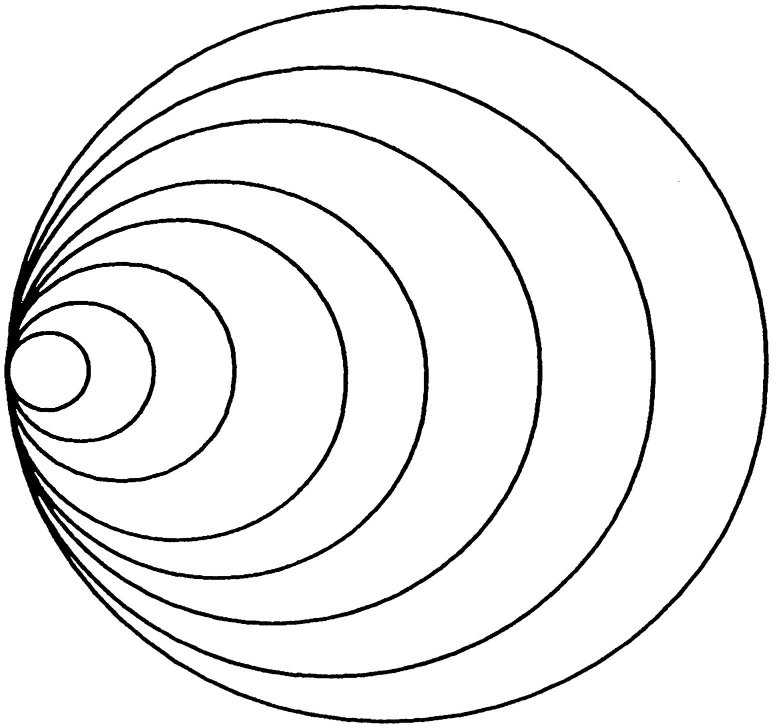

図 2

これで，この Cone のコピーを o のところつけたの一点和空間ではその基本群が自明でなくなる．Griffiths は非自明性を直接しめすのでなく，Hawaiian Earring の基本群の表示を使ってそれをしている．R. Fox がこの論文の Review で直接証明の方が簡単であることを示唆している．(直接証明は筆者 [4] にある．) Griffiths の Hawaiian Earring の基本群の表示の証明にはギャップがあり，1985 年に Morgan-Morrison [10] により正しい証明が与えられている．実はそのギャップというのは，ひどいギャップともいえるが大したギャップではないともいえる．というのは，8 の字の空間は Hawaiian Earring のレトラクトであるので Hawaiian Earring の基本群の表示の証明は 8 の字の空間の基本群が 2 次の自由群となるという証明を含んでいるはずであるのだが，そうなっていない．つまり，Griffiths の証明は局所的な複雑さを処理する処方箋が書いてあるので，そのアイディアと 8 の字空間の基本群が 2 次の自由群となる場合の証明のアイディアを融合すれば，正しい証明となる．このアイディアの融合をスムーズに実行するのは，無限語 [3, 5] を使うことであると思うが今のところ筆者以外に無限語を使うこ

とを積極的にしている人はあまりいないようである．Cannon-Conner [1] によるものが独立に無限語を導入している論文で，トポロジストにはそちらの方が読みやすいらしい．ひとつには筆者の論文は一般の群の上の語を扱っているということであるが，Conner が筆者にいっていたように，筆者が一般の群に関しての語で 6 ページで済ませているところを彼らは整数群に関する語で 30 ページを使って書いているせいかもしれない．よく知られているように 8 の字でなく円周を沢山つけてできる空間，ブーケ，の基本群は自由群 F となる．(ブーケの円周の数は無限でもよい．) 空間 X と $x \in X$ があたえられているとする．自由群 F からの準同型写像 h を与えるとブーケから X への連続写像 f があって h は f から導かれる準同型写像となる，つまり $h = f_*$ である．これと同じことが Hawaiian Earring の場合成り立つかというとすぐ成り立たないことがわかる，それはえらく大雑把な方法でわかる．X が separable であると Hawaiian Earring は連続体濃度なので，連続写像は連続体濃度以下しかない．例えば有理数群 $\mathbb{Q}$ を普通の仕方で基本群として実現すれば，separable な空間 X の基本群として実現できる．Hawaiian Earring の基本群から整数群 $\mathbb{Z}$ の可算積への全射がある．$\mathbb{Z}$ の可算積には連続濃度の一次独立な元がとれるので，有理数群 $\mathbb{Q}$ には実数直線の部分集合全体と同じ濃度の準同型写像がとれるので，極めて多くの準同型写像が連続写像から導かれないものであることがわかる．そのため，Hawaiian Earring の場合は何かの制限が必要である．さらに，conjugate の問題がある．一般に準同型写像 $h : G \to H$ について $x \in H$ による共役をとることにより別の準同型写像を得られる．定義域がブーケの基本群のときは生成元の移る先をすべて共役元として連続写像を作り直せるが Hawaiian Earring の場合であると無限個の円周の移り先が 1 点に収束していないと連続写像とならないので共役をとる操作は一般には連続写像との関係を壊すこととなる．そこで，この共役を加味することは必須となる．筆者 [5] は Hawaiian Earring の基本群の自分自身への準同型写像は連続写像から導かれる準同型写像の共役となることを証明した．この頃までにもフラクタルの基本群も漠然とは頭にあったが解明することはとてもできないように思っていた．実際，解明ができないことはその後，以下のようにわかることではあった．

1998 年に Cannon-Conner が Hawaiian Earring の基本群に関する 3 つのプレプリントを書いたがその中で 1 次元空間の中の reduced path

の概念がありこの概念によって無限語に関する色々な事柄を一次元空間の path に置き換えて展開できるだろうと思った．1 次元空間の中の path が reduced path と端点を固定しホモトピー同値であることは Curtis-Fort により 1960 年ころに示されている．これを無限語における既約語の代わりに使えば何かいえるはずだと思った．

次の補題が基本的なもので，上記の Hawaiian Earring の基本群に関する定理の拡張ともなっている．これを述べるため少し新しい概念を定義する．$h : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ を準同型写像とする．このとき $x_0 \in X_h^w$ であるとは，x_0 の任意の近傍にそのホモトピー類が h により自明でない元に写されるループがあることをいう．正確に述べると，p を x_0 から x へのパスとして $\varphi_p : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(X,x)$ を基点を換える同型写像としたとき，

$$\forall U(U : x_0 \text{ の近傍} \to \exists f(f : x_0 \text{ を基点とするループ} \wedge h \circ \varphi_p([f]) \neq e))$$

であること．この定義のなかでパス p のとり方によっていないことがわかるから，定義になっていることがわかる．また h が id ならば，x_0 で semi-locally simply-connected でないということと同値である．また，そのため semi-locally simply-connected でない点の全体を X^w と記す．

補題 1 [6, Lemma 5.1] X を第 1 可算な空間，Y を 1 次元の距離空間とし，$h : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ を準同型写像とする．このとき任意の $x_0 \in X_h^w$ に対して以下が成立する点 $y_0 \in Y$ が唯一つ存在する:

> x_0 から x への X のパス p に対して Y のパス q (y_0 から y へ) がホモトピーを除き一意に存在して
>
> > 任意の連続写像 $f : (\mathbb{H}, o) \to (X, x_0)$ について $h \circ \varphi_p \circ f_* = \varphi_q \circ g_*$ となる連続写像 $g : (\mathbb{H}, o) \to (Y, y_0)$ が存在する．

この補題は位相幾何の研究をある程度続けている方にはとても信じられないものであるはずである．この補題をすぐ受け入れられる方は次の点を見逃されていると思う．それはすでに述べたことと関係がある．Hawaiian Earring の基本群の自分自身への準同型写像は連続写像から導かれる準同型写像の共役となるということを述べたが，一方 Hawaiian Earring の基本群から有理数群へ準同型写像は自然なものばかりではないことも述べた．つまり，準同型写像のターゲットの群の性質が関わっ

ているわけで，そのことをとらえていないで空間的な理解だけで納得できるはずではない．

E. Specker が 1950 年に証明した Specker の定理といわれているアーベル群の定理があるが，この定理はあまり知られていない．皆さんの周りの方に訊いてみられるとよいと思う．この定理の系として可算生成の自由アーベル群は $\mathbb{Z}$-反射的であることが成立する．J. Łoś と E. C. Zeeman が独立に自由アーベル群の濃度が最小の可測基数未満のとき $\mathbb{Z}$-反射的であることを証明している．反射性はノルムあるいは位相の構造のない場合，有限生成特有の性質と思われており，すでに説明したように成立しない場合が多いせいか代数関係の専門家に知られていないようである．この定理の非可換版が Higman の定理で 1952 年に証明されており，この定理の証明を空間のパスに適用した補題が上記の補題の証明に使われる．そのため，Specker の定理の成立をスムーズに受け入れられる感覚がないと上記の補題を受け入れらるはずがないということなのである．

さて，この補題を受け入れてしまうと X_w^h の点に対して，Y の点が 1 意に決まる．1 意に決まれば大抵連続写像になると思うのが人情であるわけで，まあそのとおり連続となる．とくに h が単射で，X がすべての点で semi-locally simply connected でないという状況だと X から Y への連続写像が定義される．また特に 基本群の間の同型写像が与えられれば同相写像が導かれる．このように 1 次元のペアノ空間では semi-locally simply connected でない点は基本群のなかにその点の情報を残している．そこで基本群の同型性からホモトピー同値性を導こうとした場合障害となるのは semi-locally simply connected である点をどうするかということなのである．2005 年の Beldewo で BYU の Greg Conner はこのことに近い定理を発表したが，その定理自体誤っていることを筆者が指摘した．ただこの際補題として次の定理を述べた．この定理は Mark Meilstrup の修士論文 [9] であり，インターネットでも検索できる．(ただ筆者にはここに書いてある証明の筋で，正確な証明をかけるのかよくわからない．少し強い結果を導く必要もあり，以前の Hawaiian Earring の特徴付けのときにした証明 [6] と同じ考え方で Brick Partition を使った証明をつけた [2]．)

定理 2: 1 次元のペアノ空間は 1 次元ペアノ空間 X で $X \setminus X^w$ が高々可算個の開区間の非交叉和となるものとホモトピー同値である．

これを認めてしまうと [6] で展開した考え方つまり上記の補題およびその後に述べたことから $\pi_1(X,x)$ から $\pi_1(Y,y)$ への同型写像から，X^w と Y^w の間の同相写像があるわけだから，開区間の部分をどう写せばよいかという問題になる．実は補題 1 のなかにどうしたらよいか書いてある．2005 年の Beldewo でも気がついておかしくなかったことなのだが，筆者はホモトピー型を決定するという問題にあまり興味がなかった．それよりも $X = X^w$ の場合同相であることから群の構造の性質と空間の性質のつながりの興味があり，それはきっと他の人はしないことであろうから自分ですべきことだと思っていたが，ホモトピー型を決定する方にはあまり興味をもっていなかった．そのためか，2005 年のときに間違いを指摘はしたものの定理 2 を記憶しただけでその問題も忘れてしまった．2008 年の秋に静岡大学の集中講義を小山さんが頼んでくださったのが，僕は学生に向かってトポロジーの講義は一度もしたことがないので，専門家に対する講演とは異なるのだから少し考えなければならないと思った．主題は「野性的空間の基本群」ということであるのだけれど，授業をするからにはトポロジーの研究のなかでどのような位置づけなのかとか，どのような興味で行われているかとか話さなければならないと思った．しかし，ほぼ自分の興味だけでやってきたことであるので，考えようもなく他人が何に興味があるか考えて，ホモトピー型ということを話すべきだと思い「1 次元ペアノ空間のホモトピー型が基本群で決定されるか?」という問題にふれるべきだと思った．ただ，一度もその問題を考えようとしないで話すのはよくないと思い考えてみた．定理 2 を出発点にしたが，彼らの失敗と同じ筋に入って 2 日くらいしたとき，補題 1 をもっと真面目に使うことを考えるべきだと思い，気がついたときこれでダメならもともとダメであるか，あるいは何か新しいことがわかるに決まっていると思った．その後 2 日ほどで正しいことがわかった．その後定理 2 が大切であるからと思いその証明を読んでみたのだが，ここからが時間がかかり確か 3 週間以上かかったように思う．定理 2 の特別な場合は X^w が 1 点だけである場合だがその場合 Hawaiian Earring とホモトピー同値となることを [6] ので証明している．このときの証明はプレプリントの段階でカバリングを使っていたのだが筑波大学の川村さんから Bing の Brick Partition を使う方がすっきりした証明になることを教えてもらいそのような証明が出版されたものである．Brick Partition を使って簡明にしたことが定理 2 およびその変形の定理の証明に役立っている．

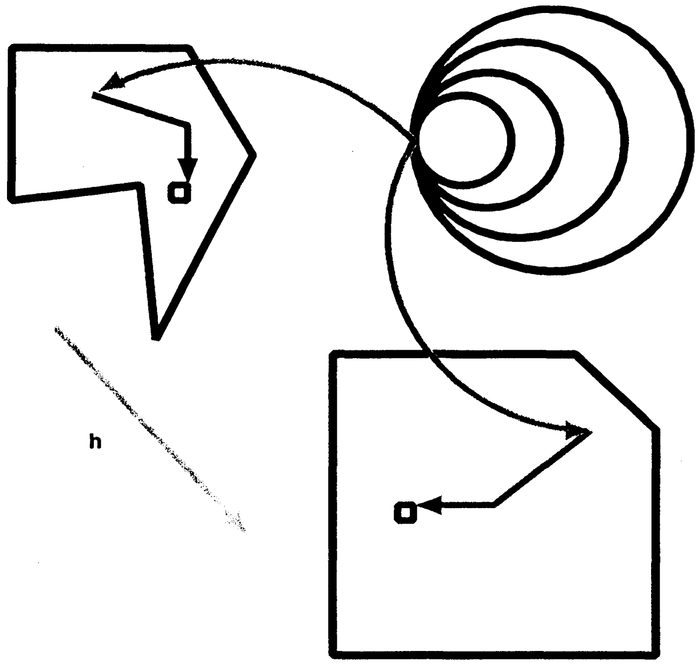

図 2

以下では定理 2 の開区間をどのように写つすことにより対応する連続写像をうるかというところを説明する．

まず補題 1 を図 2 を使って説明すると，左上の 6 角形が空間 X で赤で x を表している．青い矢印が X_h^w の点 x_0 から x へのパスである．これに対して y_0 と y_0 から赤の点 y へのパスが決まる．y_0 は一意であり y_0 から赤の点 y への青矢印のパスはホモトピーに関して一意である．その決まり方は，Hawaiian Earring からの連続写像で Hawaiian Earring の点 o を x_0 に写す連続写像 f に対して o を y_0 に写す連続写像g で補題にある性質を満たすように決まるということである．(印刷では色がでないと思うので私のホームページにこの pdf-file をおいておきます．)

つぎに図 3 で左上が X で右下が Y である．青色の部分は X^w と Y^w で同相であるので同じ形で書いてある．黒い部分が開区間である．この部分をどう写すかということだが左の一番上の開区間にピンクの矢印をつけた．その端点から定点 x へ赤いパスで結ぶ．するとピンクと赤をつなげた薄緑のパスができる．これは終点が x だから補題 1 から y へのパスがホモトピーを除いて一意に決まる．そうすると薄緑のパスには，薄緑のパスが対応するここで，Y において赤パスから緑色

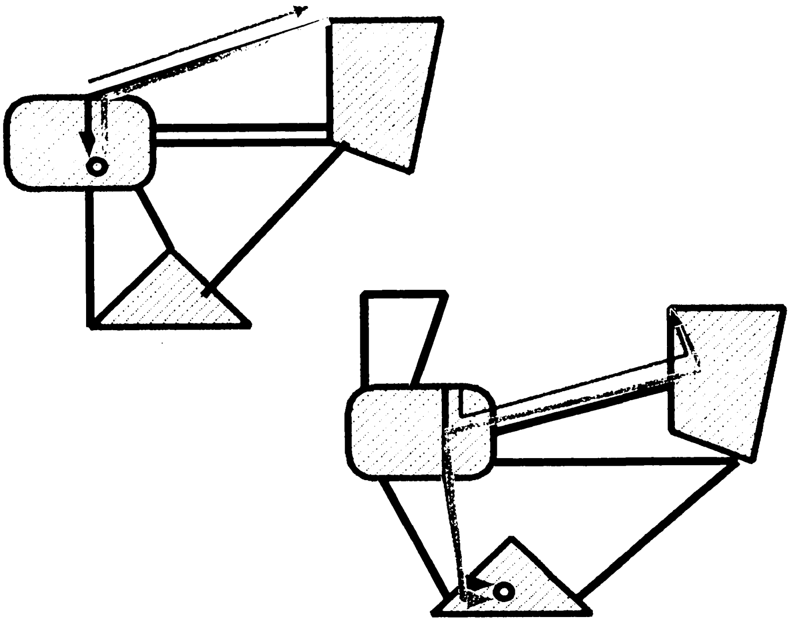

図 3

のパスをつなげたパスを考える．1 次元空間のパスは既約パスと端点を固定してホモトピックであるので，この赤パスと薄緑パスをつなげたパスの既約パスがある．そこで開区間はこの既約パスにそって連続写像で写す．写像の定義はこれで終わりで，あとは連続となることとやその他必要なことを示せばよい．

詳しい証明は [2] をホームページにおいてありますのでそちらを見てください．初めに述べた結果のほか次のことが成立します．

(1) X を 1 次元ペアノ空間，Y を 1 次元距離空間とする．このとき準同型写像 $h : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y)$ は連続写像から導かれる準同型写像と基点変換同型写像の結合となる．
(2) X, Y を 1 次元ペアノ空間とする．連続写像 $f : X \to Y$ が基本群の間の同型写像を引き起こせば f は X と Y のホモトピー同値写像となる．

結局， Higman の定理に見られる非可換スペッカー現象による双対性が Hawaiian Earring を通して 1 次元ペアノ空間とその基本群の間の双対性まで広がっているということなのだと思います．

REFERENCES

[1] J. W. Cannon and G. R. Conner, *The combinatorial structure of the hawaiian earring group*, Topology Appl. **106** (2000), 225–271.

[2] K. Eda, *Homotopy types of one-dimensional peano continua*, preprint.

[3] ———, *Free σ-products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra **148** (1992), 243–263.

[4] ———, *A locally simply connected space and fundamental groups of one point unions of cones*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 239–250.

[5] ———, *Free σ-products and fundamental groups of subspaces of the plane*, Topology Appl. **84** (1998), 283–306.

[6] ———, *The fundamental groups of one-dimensional spaces and spatial homomorphisms*, Topology Appl. **123** (2002), 479–505.

[7] H. B. Griffiths, *The fundamental group of two spaces with a common point*, Quart. J. Math. Oxford **5** (1954), 175–190.

[8] ———, *Infinite products of semigroups and local connectivity*, Proc. London Math. Soc. **6** (1956), 455–485.

[9] M. Meilstrup, *Classifying homotopy types of one-dimensional Peano continua*, 2005, Master Thesis, Brigham Young University.

[10] J. W. Morgan and I. A. Morrison, *A van kampen theorem for weak joins*, Proc. London Math. Soc. **53** (1986), 562–576.

早稲田大学理工学術院
E-mail address: eda@logic.info.waseda.ac.jp